

marque déposée

# le Calligraphe



013

TC2

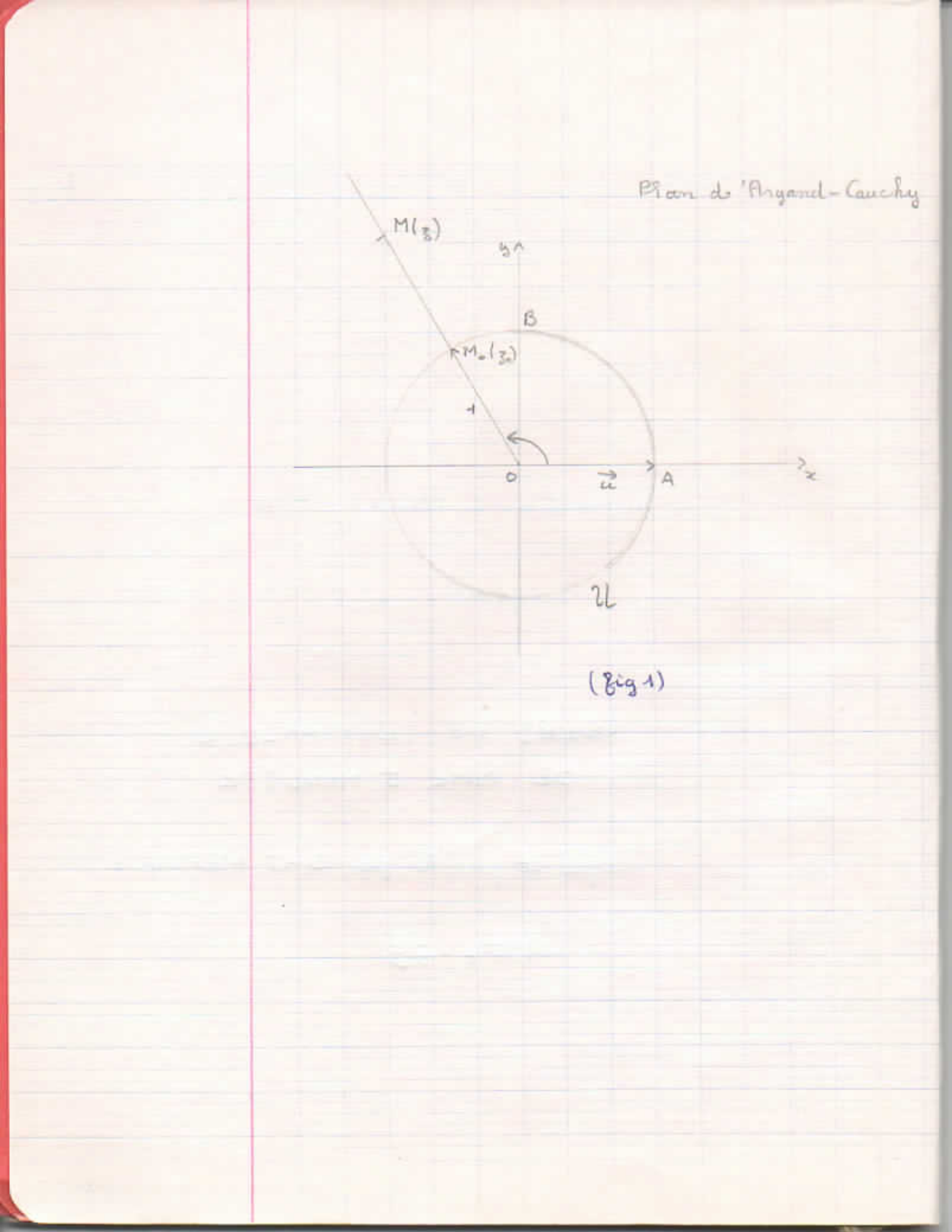
NOMBRES & PROBABILITES

LEÇONS n° 2

COURS DE TERMINALE C
DE MME J. MANOTTE

recopié et présenté par D.-J. MERCIER

1974-75




(fig 1)

6.1.75 9 (suite) Nombres complexes

## Argument d'un nombre complexe

(voir fig 1) $z = |z| z_0 \quad |z| = r$

Argument de $z$ = Arg $z_0$

Z

Arg $z$ = Arg $z_0 \simeq$ angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_0})$

arg $z$ = arg $z_0$ = une mesure réelle de l'angle précédent.

ex : $\arg z = \frac{2\pi}{3}$

Plus généralement : $\arg z = \frac{2\pi}{3} + k\,2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$$\arg \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

7.1

$z = |z| . z_0 \quad ; \quad |z_0| = 1$

$|z| = r$

$z_0 = \begin{bmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix}$ et $a_0^2 + b_0^2 = 1$

Si, de plus, la base $(\vec{u}, \vec{v})$ orthonormée utilisée pour désigner les matrices en question est directe, alors

on peut poser $\begin{cases} a_0 = \cos\alpha \\ b_0 = \sin\alpha \end{cases}$ , $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha$ = une mesure de l'angle attaché à la rotation associée à $z_0$.

Alors $z_0 = a_0 + b_0 i = \cos\alpha + i\sin\alpha$

d'où

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = r^2$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

d'où une classe de réels $\alpha$ congrus entre eux modulo $2\pi$.

**Remarque**

Soit $z = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad (a, \theta) \in \mathbb{R}^2$

* Si $a > 0$, alors $|z| = a$

et $\arg z \equiv \theta \; [2\pi]$

* Si $a < 0$, alors :

$$z = -a(-\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$z = -a\left(\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)\right)$$

alors $|z| = -a$

et $\arg z \equiv \pi + \theta \; [2\pi]$

* Si $a = 0$, $\vdash z = 0$

$|z| = 0$ et $\arg z$ indéterminé.

10.1

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ est la <u>forme trigonométrique</u> de $z$, avec $r = |z|$ et $\alpha \equiv \arg z \; [2\pi]$

① $z = z_1 \cdot z_2$

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \\ z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \end{cases}$$

$$z = r_1 r_2\left(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)\right)$$

$z_1 z_2$ a donc $r_1 r_2$ pour module et $\alpha_1 + \alpha_2$ comme

argument.

$$\begin{cases} |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 \cdot z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

<u>Remarque</u>

Dans le cas où $z_1$ et $z_2$ sont de module 1, on retrouve l'isomorphisme entre ~~la ℓ multi~~ l'ensemble des matrices de rotations muni de $\times$, soit $(\mathcal{O}^+, \times)$, et l'ensemble des angles de ces rotations munis de $+$, soit $(\mathcal{A}, +)$

Dans ce cas $|z_1| = r_1 = 1 \qquad |z_2| = r_2 = 1$

$z_1 z_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$

②

$z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \quad , r \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\right]}$$

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \quad [2\pi] \end{cases}$$

③ $z = \frac{z_1}{z_2}$ et $z_2 \neq 0$ $(r_2 \neq 0)$

$z = z_1 \times \frac{1}{z_2}$

Z

$$\begin{cases} |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad [2\pi] \end{cases}$$

donc :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$$

④ On montre (exercice) que ~~mod~~ :

$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$

et

$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n$

Alors, si $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$

$$\begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \arg(z^n) \equiv n \cdot \arg z \quad [2\pi] \end{cases}$$

Z

$$\boxed{z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)}$$

Formule de Moivre

Si $|z| = 1$, on trouve :

$$z = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

$$z^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha}$$

$n \in \mathbb{N}^*$

Est-ce que la formule est encore valable pour $n = 0$ ?

Oui si l'on convient que $z^0 = 1$, comme $x^0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

De même, $n \in \mathbb{Z}$ permet-il encore la formule ?

Soit $n < 0$, $\exists n' = -n > 0$, $n' \in \mathbb{N}^*$

Nous avons :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n}}$$

$$= \frac{1}{\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)}$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \quad [\text{cf } ②]$$

La formule de moivre est donc valable $\underline{\forall n \in \mathbb{Z}}$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Soit $Z \in \mathbb{C}$

$z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = Z \quad , n \in \mathbb{N}^*$

$Z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ donné

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ inconnu

$$z^n = \underbrace{\rho^n}_{\geq 0}(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \underbrace{r}_{\geq 0}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

Bien entendu, la 2-ligne n'a de sens que si $\alpha$ est connu (voir $Z=0$, argument indéterminé)

* Si $Z = 0 \vdash r = 0 \vdash \rho = 0 \vdash z = 0$

et $\underline{z^n = 0 \dashv\vdash z = 0}$

* Si $Z \neq 0$, $z^n = Z$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} > 0 \\ n\theta \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$n\theta = \alpha + k2\pi$

$\theta = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$

n classes de réels $\theta$ :

$$\left\{ \dot{\frac{\alpha}{n}} \; ; \; \overset{\cdot}{\overline{\frac{\alpha+2\pi}{n}}} \; ; \; \cdots \; ; \; \overset{\cdot}{\overline{\frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}}} \right\}$$

$\exists$ n classes, mod. $2\pi$, pour les arguments trouvés.

Z

$$z = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \right)$$

$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

En abrégé, on écrit souvent :

$Z = [r, \alpha]$ $\qquad$ $z = \left[\sqrt[n]{r} \; , \; \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right]$



Résumé

1) $Z = 0$, $\exists! \; z = 0 \; / \; z^n = Z$

2) $Z \neq 0$, $\exists$ n racines n-ièmes de Z, soit $z \; / \; z^n = Z$

$$z = \left[\sqrt[n]{r} \; , \; \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right] \quad , \; k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}$$

Racines cubiques du nombre 1.

$Z = 1 = [1, 0]$ $\quad$ Arg 1 = ω (<u>angle</u> nul)

$z^3 = Z = 1$

$z = \left[1, 0 + k\frac{2\pi}{3}\right]$ $\quad$ $k \in \{0, 1, 2\}$

B

(j) $M_1$

$j = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

$M_0(1)$

O A

𝒰

$(j^2)$ ou $(\bar{j})$ ou $\left(\frac{1}{j}\right)$ $\quad$ $M_2$

L'ensemble des racines cubiques de 1 est $E = \{1, j, j^2\}$

L'équation du 3<sup></sup>e degré $z^3 = 1$ devient :

$$z^3 - 1 = 0$$

$$(z-1)\underbrace{(z^2 + z + 1)}_{\text{racines } j \text{ et } j^2} = 0$$

Z

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0}$$

Un isomorphisme remarquable :

$$f : (E, \times) \longrightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$$
$$1 \longmapsto f(1) = \dot{0}$$
$$j \longmapsto f(j) = \dot{1}$$
$$j^2 \longmapsto f(j^2) = \dot{2}$$
$$1 \times j^2 \longmapsto \dot{2} = \dot{0} + \dot{2}$$
$$1 = j \times j^2 \longmapsto \dot{0} = \dot{1} + \dot{2} \quad \text{oui}$$

$\forall\, z \in E$ et $\dot{x} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$$f(z \times z') = \dot{x} + \dot{x}' = f(z) + f(z')$$

$f$ est un homomorphisme de $(E, \times)$ dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.
Comme $f$ est bijectif, c'est un isomorphisme de $(E, \times)$ sur $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$

Remarque.

$z^3 = Z$ (donné) $\quad z$ ?

Si on a la chance de connaître l'une des 3 racines cubiques, on trouve les 2 autres en multipliant celle qui est connue par les 2 racines cubiques non réelles de l'unité

**Remarque**

$$\begin{cases} j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] \\ j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{4\pi}{3}\right] \end{cases}$$

$\cos \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{3}$

Racines quatrième de 1 ;

$$E' = \{1 \,;\, i \,;\, -1 \,;\, -i\}$$

$\varphi : (E', \times) \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$

$\varphi$ = homomorphisme de groupe (bijectif)

Utilisation de la formule de Moivre ~~en la~~ trigonométrie

① Rappel

$$\begin{cases} \cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2} \end{cases}$$

②

$$\cos 3a = \cos(2a + a)$$

$$= \cos 2a . \cos a - \sin 2a . \sin a$$

$$= (\cos^2 a - \sin^2 a)\cos a - 2(\sin a \cos a)\sin a$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a . \cos a$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \underbrace{\sin^2 a}_{1-\cos^2 a} . \cos a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\cos^3 a = \frac{1}{4}\cos 3a + \frac{3}{4}\cos a$$

Idem pour $\sin^3 a$.

③ $\cos^n a$ ? $\sin^n a$ ?

On cherche à "linéariser" ces monômes de degré n.

$$\begin{cases} z = \cos\theta + i\sin\theta \\ \bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \qquad |z| = 1$$

$$\begin{cases} z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \\ \bar{z}^n = \cos n\theta - i\sin n\theta \end{cases}$$

14.1

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 2\cos\theta \\ z - \bar{z} = 2i\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^n + \bar{z}^n = 2\cos n\theta \\ z^n - \bar{z}^n = 2i\sin n\theta \end{cases}$$

On note que $\boxed{z\bar{z} = 1}$

$$(z+\bar{z})^n = z^n + n\, z^{n-1}.\bar{z} + C_n^2\, z^{n-2}.\bar{z}^2 + \dots$$
$$\dots + C_n^{n-2}\, z^2.\bar{z}^{n-2} + n\, z.\bar{z}^{n-1} + \bar{z}^n$$

Or $C_n^{n-p} = C_n^p$

$C_n^{n-2} = C_n^2$, etc...

$$(z+\bar{z})^n = (z^n + \bar{z}^n) + n\underbrace{z\bar{z}}_{1}(z^{n-2}+\bar{z}^{n-2}) + \dots$$
$$\dots + C_n^k \underbrace{z^k\bar{z}^k}_{1}(z^{n-2k}+\bar{z}^{n-2k}) + \dots\dots$$

$(k < n-k)$

Suivant la parité de $n$, on trouve un dernier terme constant ($n$ pair) ou un dernier terme renfermant en facteur $z^k + \bar{z}^k$.

Les sommes $z^k + \bar{z}^k$ seront remplaçables par $2\cos k\theta$ (1<sup></sup>er degré en cosinus).

Par ailleurs, $(z+\bar{z})^n = 2^n \cos^n\theta$

D'où :

$$2^n\cos^n\theta = 2\cos n\theta + 2n\cos(n-2)\theta + \dots$$
$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta + \frac{1}{2^{n-1}}\, n\cos(n-2)\theta + \dots$$

Exemple : $n = 4$

$z + \bar{z} = 2\cos\theta$

$(z+\bar{z})^4 = 2^4\cos^4\theta$

$z^4 + 4z^3\bar{z} + 6z^2\bar{z}^2 + 4z\bar{z}^3 + \bar{z}^4 = 2^4 \cos^4\theta$

$2\cos 4\theta + 4.2\cos 2\theta + 6 = 2^4\cos^4\theta$

$2^4\cos^4\theta = 2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6$

$$\boxed{\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}}$$

Pour $\sin^n\theta$, on utilise :

$z - \bar{z} = 2i\sin\theta$

$(z-\bar{z})^n = 2^n i^n . \sin^n\theta$

ex : $n = 3$

$(z-\bar{z})^3 = 2^3 i^3 . \sin^3\theta$

$z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3 = 2^3(-i) . \sin^3\theta$

$(z^3 - \bar{z}^3) - 3(z\bar{z})(z-\bar{z}) = 2^3(-i)\sin^3\theta$

$2i\sin 3\theta - 3.2i\sin\theta = 2^3(-i)\sin^3\theta$

$\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$

Cas de polynômes trigonométriques.

Soit $P(a) = \cos^4 a \sin^2 a + \sin^3 a$

En remplaçant chaque puissance par une des expressions données ci-dessus, on arrive à des termes :

* ou du premier degré en sinus ou cosinus

* ou à $\cos 4a \cdot \cos 2a$

Se souvenir alors de :

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$\theta = a$

$$P(a) = \left(\frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a\right) + \sin^3 a$$

$$P(a) = \frac{1}{16}\cos 4\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta + \frac{3}{16} - \frac{1}{16}\cos 4\theta \cdot \cos 2a - \frac{1}{4}\cos^2 2a - \frac{3}{16}\cos 2a + \sin^3 a$$

$$P(a) = \frac{1}{16}\cos 4a + \frac{1}{4}\cos 2a + \frac{3}{16} - \frac{1}{16}\left[\cos 2a + \cos 6a\right] - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4a}{2}\right) - \frac{3}{16}\cos 2a + \sin^3 a$$

$$P(a) = \frac{1}{16}\cos 4a + \frac{1}{4}\cos 2a + \frac{3}{16} - \frac{1}{16}\cos 2a - \frac{1}{16}\cos 6a - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4a - \frac{3}{16}\cos 2a - \frac{1}{4}\sin 3a + \frac{3}{4}\sin a$$

$$P(a) = -\frac{1}{16}\cos 6a - \frac{1}{16}\cos 4a - \frac{1}{4}\sin 3a + \frac{3}{4}\sin a + \frac{1}{16}$$

22.5 10 # Probabilités

Soit $\Omega$ l'univers des éventualités (ou événements élémentaires)

On le considère $\Omega$ fini (cf programme)

$\mathcal{P}(\Omega)$ = ensemble des parties de $\Omega$

$\Omega = \{ \omega_1 ; \omega_2 ; \omega_3 ; \dots ; \omega_n \}$

$A = \{ \omega_2 , \omega_4 , \omega_7 \}$ $\qquad A \subset \Omega$

et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

A est un événement qui se produira sous l'influence

soit de $\omega_2$

soit de $\omega_4$

soit de $\omega_7$.

On travaillera toujours avec une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ (éventuellement confondue avec elle). Soit $\mathcal{B}(\Omega)$ définie ainsi :

1°/ $\mathcal{B}(\Omega) \neq \emptyset$

2°/ $A \in \mathcal{B}(\Omega) \vdash \bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$

$$\bar{A} = \complement_{\Omega} A \; ; \begin{cases} A \cup \bar{A} = \Omega \\ A \cap \bar{A} = \emptyset \end{cases}$$

3°/ $\left. \begin{matrix} A \in \mathcal{B}(\Omega) \\ B \in \mathcal{B}(\Omega) \end{matrix} \right\} \vdash A \cup B \in \mathcal{B}(\Omega)$

Donc $\mathcal{B}(\Omega)$, non vide, est stable pour la complémentation et pour la réunion ; $\mathcal{B}(\Omega)$ est dite une tribu.

ex : $\{\Omega, \emptyset\}$

$\{\Omega, A, \bar{A}, \emptyset\}$

Conséquences :

1°) $\Omega \in \mathcal{B}(\Omega)$

En effet $\mathcal{B}(\Omega) \neq \emptyset \vdash \exists A \vdash \bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega)$

$A$ et $\bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega) \vdash A \cup \bar{A} = \Omega \in \mathcal{B}(\Omega)$

2°) $\emptyset \in \mathcal{B}(\Omega)$ car $\emptyset = \bar{\Omega}$

3°) $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{B}(\Omega) \\ B \in \mathcal{B}(\Omega) \end{array}\right\} \vdash A \cap B = \mathcal{B}(\Omega)$

En effet $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (loi de Morgan)

$N(p \wedge q) \Longleftrightarrow Np \vee Nq$

$A \in \mathcal{B}(\Omega) \vdash \bar{A} \in \mathcal{B}(\Omega$

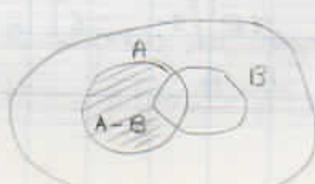
de même pour B

$\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{B}(\Omega)$

$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B \in \mathcal{B}(\Omega)$

CQFD

4°) $A - B \in \mathcal{B}(\Omega)$ dès que $A$ et $B \in \mathcal{B}(\Omega)$




$A - B = A \cap \bar{B}$

$$5°/ \quad \left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{B}(\Omega) \\ B \in \mathcal{B}(\Omega) \end{array}\right\} \vdash A \triangle B \in \mathcal{B}(\Omega)$$

$\triangle$ = diff. symétrique de A et B

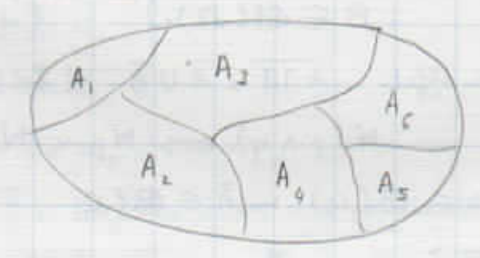
$$A \triangle B = \underbrace{(A-B)}_{\in \mathcal{B}(\Omega)} \cup \underbrace{(B-A)}_{\in \mathcal{B}(\Omega)}$$

CQFD

Remarques

* $\mathcal{P}(\Omega)$ = tribu

* Soit une partition de $\Omega$.




$$\text{Partition} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$$
$\neq$ tribu

Cependant, on peut faire une tribu en adjoignant aux $A_i$, $i \in [1, ..., 6]$, 1°/ $\emptyset$ 2°/ toutes les réunions des $A_i$

Un espace $\Omega$ munis d'une tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ est dit espace probabilisable.

On introduit alors une probabilité.

## Définition d'une probabilité

$$p : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$\Omega \longmapsto 1$$
$$A \cap B = \emptyset \begin{cases} A \longmapsto p(A) = p_1 \\ B \longmapsto p(B) = p_2 \end{cases}$$
$$A \cup B \longmapsto p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

* $p(\Omega) = 1$
* Probabilité des axiomes totales :

$$A \cap B = \emptyset \vdash p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$p(A) \geq 0 \ , \ \forall A \in \mathcal{B}(\Omega)$$
$$p(\Omega) = 1$$
$$A \cap B = \emptyset \vdash p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Remarque : $C = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \}$ éventualités incompatibles.

$$p(C) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3)$$

Conséquences :

* $p(\emptyset)$ ?

$\Omega \cap \emptyset = \emptyset \qquad \Omega \cup \emptyset = \Omega$

$p(\Omega) = p(\Omega \cup \emptyset) = p(\Omega) + p(\emptyset)$

$p(\emptyset) = 0$

* $p(A) = p$ , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

$A \cap \bar{A} = \emptyset \qquad p(A) + p(\bar{A}) = p(A \cup \bar{A})$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

* Si $A \subset B$ , la réalisation de A entraîne alors celle de B.

De plus $A \cap \complement_B A = \emptyset$

$$A \cup \complement_B A = B$$

donc $p(B) = p(A) + \underbrace{p(\complement_B A)}_{\geq 0}$

$$A \subset B \vdash p(A) \leqslant p(B)$$

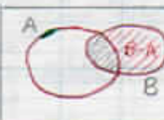
ex : $A \subset \Omega \vdash p(A) \leqslant 1$ , $\forall A \subset \mathcal{B}(\Omega)$

$$\forall A \in \Omega \ , \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

26.5

## Cas de 2 évènements non incompatibles

$A \cap B \neq \emptyset$




$p(A \cup B) = p(A \cup (B-A))$

$\qquad = p(A) + p(B - A)$

$p(B-A) = ?$

$B = (B-A) \cup (A \cap B)$

$p(B) = p(B-A) + p(A \cap B)$

$p(B-A) = p(B) - p(A \cap B)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$




Cas où A, $A \in \Omega$, est la réunion de $A_i$ ; les $A_i$ formant une partition de A.

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$$

Si $A = \Omega$, et si les $A_i$ sont les $\{\omega_i\}$.

$$p(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i)$$

Dans le cas de l'équiprobabilité, alors $1 = n \cdot p(\{\omega_i\})$

$$p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

Toujours avec la même hypothèse, si $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, alors $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{n}$

$$\text{car } p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3)$$
$$= 3p(\omega_i) = 3 \times \frac{1}{n}.$$

Exercices

① 

Sac : 4 boules noires
5 b rouges
6 b blanches

On tire 1 boule au hasard ;

$$p(A) = p(\text{b rouge}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$
$$p(B) = p'(\text{blanche ou noire}) = \frac{6+4}{15}$$
$$\text{ou } = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

Remarque : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$B = \bar{A}$

(2)

Population de 100 personnes.

(B) 45 blondes

(Y) 40 aux yeux bleus

25 blondes aux yeux bleux.

On choisit une personne au hasard

probabilité pour qu'elle ait au moins un des caractères ci-dessus ?

$$P = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{?}{100}$$

card $A$ = card $(B \cup Y)$ = car $B$ + car $Y$ − car $B \cap Y$

card $A = 45 + 40 - 25 = 60$

$$P = \frac{60}{100} = 0{,}6$$

(3)

Sac : 4 boules rouges

6 " noires

2 boules sont tirées successivement. Quelle est la probabilité p pour que la première soit rouge, la 2<sup>e</sup> noire, si la première elle est ou non remise dans le sac ~~après~~ avant le 2 –

tirage ?

* La 1<sup></sup>

* La 1^{re} boule tirée est remise.

r r r r n n n n n n

$$p(A \cap B) = \frac{4 \times 6}{100} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10}$$

$$= p(A) \times p(B)$$

$p(A) = p($ tirage de une rouge $)$

$p(B) = p($ " de une noire $)$

* La 1^{re} boule tirée n'est pas remise.

Nombre de cas possibles $= 90 = 10 \times 9$

Nombre de cas favorables $= 24 = 4 \times 6$

$$p(A \cap B) = \frac{24}{90} = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = p(A) \times p(B/A)$$

$p(B/A) = p$ de B si A

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

(4)

3 questions d'oral : { 10 d'algèbre ; 7 de trigo ; 5 d'arithmétique }

* Probabilité pour que les 3 tirées soient d'algèbre ?

(tirages successifs sans remise)

$p(A_1) = \frac{10}{22}$

$p(A_2 \cap A_1) = p(A_1) . p(A_2 / A_1)$ — one ne distingue pas les sujets d'Al.

$p(A_2 / A_1) = \frac{9}{21}$

$$p(\underbrace{A_2 \cap A_1}_{B}) = \frac{10}{22} \times \frac{9}{21}$$

$$p(A_3 \cap B) = p(B) . p(A_3 / B)$$

$$= p(B) . \frac{8}{20}$$

$$= \frac{10}{22} \times \frac{9}{21} \times \frac{8}{20} = \frac{6}{77}$$

$$p = p(A_3 \cap A_2 \cap A_1) \simeq 0,077$$

$$\simeq 0,08 \quad \text{à } 1/100 \text{ près}$$

* p pour que le candidat tire, dans cet ordre, 1 sujet d'alg, 1 sujet de trigo, 1 d'arithmétique.

si dans l'ordre, x3!

$$p = \frac{10}{22} \times \frac{7}{21} \times \frac{5}{20}$$

29.5 11

## Applications mesurables
## (ou variables aléatoires discrètes)
## (ou aléas numérique)

$X : \underset{\text{esp. probabilisé fini}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\text{esp. probabilisable fini}}{\Omega'}$

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), p)$.

$(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$

X est dite variable aléatoire ssi :

(*) $\forall A' \in \mathcal{B}(\Omega')$, son image réciproque par X, soit $X^{-1}(A')$, est élément de $\mathcal{B}(\Omega)$.

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{B}(\Omega)$$

On montre que X est surjective.

Si oui, $X(\Omega) = \Omega'$

et inversement.

* $X(\Omega) \subset \Omega'$
* $\Omega' \in X(\Omega)$ ?

or $\Omega' \in \mathcal{B}(\Omega')$

Est-ce que $\mathcal{B}(\Omega') \subset \mathcal{J} X(\Omega)$ ?

? ( oui (voir définition (*))

Donc $\Omega' \subset X(\Omega)$

$\Omega' = X(\Omega)$

et $X$ est surjective.

Maintenant, on va probabiliser $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$ comme suit

$$p'(A') \stackrel{\downarrow}{\underset{\uparrow}{=}} p(X^{-1}(A'))$$

$\mathcal{B}(\Omega)$ $\mathcal{B}(\Omega')$

$X^{-1}(A') =$ $A'$

0 1 1

$p'$ est effectivement une probabilité puisque :

$p' : \mathcal{B}(\Omega') \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$p'(\Omega') = p(X^{-1}(\Omega'))$

or $X : \Omega \longrightarrow \Omega'$

est-ce que $X^{-1}(\Omega') = \Omega$ ? oui (admis)

or $p(\Omega) = 1$ donc $p'(\Omega') = 1$.

axiome des probabilités totales

$$\left. \begin{array}{l} p'(A' \cup B') = p(A') + p(B') \\ \text{lorsque } A' \cap B' = \emptyset \end{array} \right\}$$

or : $p'(A' \cup B') = p(X^{-1}(A' \cup B'))$

$= p[X^{-1}(A') \cup X^{-1}(B')]$

$= p(X^{-1}(A')) + p(X^{-1}(B'))$

car images réciproques disjointes elles aussi

On appelle probabilité-image, l'application de $\mathcal{B}(\Omega)$ (ici $\mathcal{P}(\Omega)$) vers $[0, 1]$ ainsi définie : à tout évènement A' (sous-ensemble) de $\Omega'$ on associe la probabilité $p(A)$ de l'évènement A, de $\Omega$, formé de toutes les éventualités dont les images, par X, sont des éléments de A'. 15

Donc $p'(A' \cup B') = p'(A') + p'(B')$

oui

p' est dite "probabilité image" de p par X.

Exemple

$\Omega$ comprend 32 éléments.

$\Omega' \subset \mathbb{R}$ ; $X(\Omega) = \Omega'$

X = variable aléatoire réelle

ou aléa numérique.

X : tirage d'un as $\longrightarrow$ 4

" roi $\longrightarrow$ 3

" dame $\longrightarrow$ 2 $\quad \Omega' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

" valet $\longrightarrow$ 1

" carte $\mathcal{C}$ $\longrightarrow$ 0

On munit évidemment $\Omega'$ d'une tribu $\mathcal{B}(\Omega')$, par exemple $\mathcal{B}(\Omega') = \{\emptyset ; \{1\} ; \ldots ; \{2, 3, 4\} ; \ldots ; \Omega'\}$

$p(R) = p'(3) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$p(\mathcal{C}) = p'(0)$

Loi de Probabilité : (dans cet exercice)

(Distribution de probabilité)

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| p' | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Ce tableau montre la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Théorèmes admis

On démontre que l'ensemble des variables aléatoires construites sur le même ensemble $\Omega$ est :

1°/ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ $(\mathcal{V}, +, .)$

2°/ un anneau commutatif unitaire $(\mathcal{V}, +, \times)$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega_i \longmapsto X(\omega_i) = r$

$\lambda . X : \omega_i \longmapsto \lambda X(\omega_i) = \lambda r$ (ext)

$Y : \omega_i \longmapsto Y(\omega_i) = r'$

$\lambda X + \mu Y : \omega_i \longmapsto (\lambda X + \mu Y)(\omega_i) = \lambda r + \mu r'$

$X . Y$ (int) $\omega_i \longmapsto (XY)(\omega_i) = r r'$

$e : \omega_i \longmapsto e(\omega_i) = 1, \quad \forall \omega_i \in \Omega$

v.a.r. unit.

## Fonction de répartition

On dit que X "prend" les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_m$.

On les classe par ordre croissant.

$x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m$

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = p(X < x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = p(X < x)$$

Si $x \leq x_1$, $F(x) = 0$

$x > x_m$, $F(x) = 1$

Si $x_1 < x \leq x_2$, $F(x) = p(x_1)$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$x = x_{m-1}$, $F(x) = p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_{m-2})$

$x_{m-1} < x \leqslant x_m$, $F(x) = 1 - p(x_m)$

$F(b) - F(a) = p\left[a \leq X < b\right]$

$(a < b)$

En effet, $F(b) = p(X < b)$

$= p\left[(X < a) \cup (a \leq X < b)\right]$

↘ ↙

incompatibles

$$F(b) = \underbrace{p(X<a)}_{F(a)} + p(a \leq X < b)$$

oui

Exemple

1 jet de 2 pièces de monnaie.

Z = v.a.r. relative à "nombre de faces obtenues

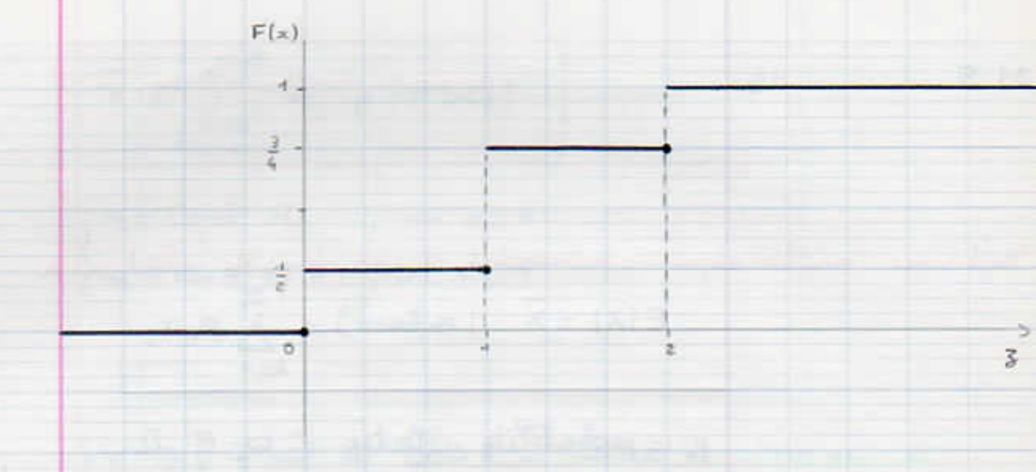
Nombre de cas possibles : $\{\underbrace{PP}_{0} ; \underbrace{PF}_{1} ; \underbrace{FP}_{1} ; \underbrace{FF}_{2}\}$ (4

| Z | | 0 | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p(Z) | | $\frac{1}{4}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{4}$ | |
| F(z) | 0 | | $\frac{1}{4}$ | | $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ | | 1 |
| | | 0 | | $\frac{1}{4}$ | | $\frac{3}{4}$ | |

* Graphique de p (distribution de probabilité)

p ; $\frac{1}{2}$ ; $\frac{1}{4}$ ; 0 ; 1 ; 2 ; Z

diagramme en bâtons
(cf distribution de probabili




courbe cumulative

(représentation graphique de la fct de répartition)

F est une fct en escalier continue $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$.

Continue à gauche aux points 0, 1, et 2.

Espérance mathématique, relativement à une variable aléatoire X

$$E(X) = \bar{X} \quad (x \text{ barre}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$p_i$ = probabilité affectée à $\omega_i \in \Omega$

$x_i = X(\omega_i)$

ex : $\omega_1 \longmapsto x_1$

$\omega_3 \longmapsto x_1$

$\omega_2 \longmapsto x_1$

$\omega_4 \longmapsto x_2$

$\omega_5 \longmapsto x_2$

$\omega_6 \longmapsto x_3$

$$E(X) = \bar{X} = x_1 p(\omega_1) + x_1 p(\omega_2) + x_1 p(\omega_3) + x_2 p(\omega$$
$$+ x_2 p(\omega_5) + x_3 p(\omega_6)$$

Tout se passe comme si on avait pondéré les $x_i$ par les coefficients $p_i = p(\omega_i)$, et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

$$\bar{X} = x_1 \left[p'(X = x_1)\right] + x_2 \left[p'(X = x_2)\right] + x_3 \left[p'(X=\right.$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{i=m} x_i \cdot p'(X = x_i)$$

$$\begin{cases} n = \text{Card } \Omega & , \text{ ici } n = 6 \\ m = \text{Card } X(\Omega) & , \text{ ici } m = 3 \end{cases}$$

Remarque

$\{X, Y\}$ = ens. de 2 v.a.r. associées au même ens. $\Omega$

$Z = \lambda X + \mu Y$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} p(\omega_i)(\lambda x_i + \mu y_i)$$

$$E(Z) = \lambda \sum_{1}^{n} p(\omega_i) x_i + \mu \sum_{1}^{n} p(\omega_i) y_i$$

$$E(Z) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

$$\bar{Z} = \lambda \bar{X} + \mu \bar{Y}$$

$$E : \underset{\text{esp. vect. des v.a.r}}{V} \longrightarrow \underset{\text{espa. vect.}}{\mathbb{R}}$$

$E$ = forme linéaire définies sur $V$

Cas où la var est constante

$X_0 : \omega_1 \longmapsto x_0 = X_0(\omega_1)$

$\omega_2 \longmapsto x_0 = X_0(\omega_2)$

...

$\omega_n \longmapsto x_0 = X_0(\omega_n)$

$$\bar{X}_0 = E(X_0) = x_0 \left[ \overbrace{p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_n)}^{1} \right]$$

$$E(X_0) = x_0$$

Si on cherche $E(\bar{X}_0) = E(\underbrace{x_0}_{\text{v.a.r. constante}}) = \bar{X}_0$

$$\boxed{E(\bar{X}_0) = \bar{X}_0}$$

Remarque

$X - \bar{X} =$ est une v.a.r. particulière.

$E(X - \bar{X}) = E(X) - E(\bar{X})$

$= \bar{X} - \bar{X} = 0$

$$\boxed{E(X - \bar{X}) = 0}$$

$X - \bar{X}$ s'appelle la variable aléatoire centrée associée à $X$ ( $\bar{X}$ est une sorte de moyenne qui consti

un nouveau réel auquel on se réfère pour calculer les nouvelles valeurs prises par la nouvelle variable).

Variance

$$v(X) = E\left[(X-\bar{X})^2\right]$$

La variance est l'espérance du carré de la variable aléatoire centrée associée à X.

2- forme : $v(X) = E\left(X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2\right)$

voir anneau commutatif des v.a. réelles

$= E(X^2) - 2\bar{X}\,E(X) +$

$= E(X^2) - 2\,\bar{X}.\bar{X} + \bar{X}^2$

$$v(X) = E(X^2) - \bar{X}^2$$

$$v(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

Ecart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{v(X)}$$

Remarque

① $v(\lambda X) = E\left[(\lambda X - \overline{\lambda X})^2\right]$ $\overline{\lambda X} = E(\lambda X) = \lambda E$

$= \lambda$

$= E\left[(\lambda X - \lambda \bar{X})^2\right]$

$= E\left[\lambda^2 (X - \bar{X})^2\right]$

$v(\lambda X) = \lambda^2 E\left[(X - \bar{X})^2\right]$

Donc

$$v(\lambda X) = \lambda^2 v(X)$$

② $v(X + \underset{cte}{h}) = E\left[(X + h - (\bar{X} + h))\right]$ $\overline{X + h} = \bar{X} +$

$$v(X + h) = v(X)$$

2.6 17 Épreuves répétées

(ou tirage de Bernouilli)

* 2 éventualités et 2 seulement.

$n$ épreuves ou expériences.

elles sont toutes indépendantes les une des autres.

On cherche à calculer la probabilité $P$ pour qu'il y ait $k$ succès, sur les $n$ épreuves.

On donne $p$ la probabilité pour qu'il y ait 1 succès au bout d'une épreuve

($q = 1 - p$ = probabilité pour 1 échec)

ex : on joue à pile ou face 10 fois.

On demande $P(X = k)$

$k \in [0, 10] \cap \mathbb{N}$

○ ● ○ ○ ○ ○ ○ ● ● ○

$P_1$ d'avoir ce dessin : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$

Or il y a $C_{10}^3$ distributions analogues :

ex : ○ ○ ○ ○ ● ○ ● ● ○ ○

$P_2 = P_1$

$P = C_{10}^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{1}{2^{10}}$

$$\frac{10 \cdot 8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

$$10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^{10}}$$

$$\frac{30}{2^8} = \frac{15}{2^7} = \frac{15}{128} \simeq 0{,}12$$

On peut remplacer le jeu de pile ou face à le jeu de dés avec $p = \frac{1}{6}$ (p pour lire le 4).

$q = \frac{5}{6}$ (pour ne pas lire le 4)

alors $\underbrace{P(X = 5)}_{\text{en 10 jets}} = C_{10}^{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5$

Plus généralement

$$\boxed{\text{prob}(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

Espérance mathématique de la variable aléatoire qui associe à l'ensemble des n épreuves le nombre k de succès.

1°/ On peut faire le calcul classique :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{k}_{x_i} \underbrace{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}_{P(k)}$$

d'ailleurs :

$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ $\quad E(X) = \sum_{k=1}^{n} n C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = n$

2°/ On peut aussi regarder l'une des $\underset{n}{\underbrace{10}}$ épreuves ; chercher son espérance :

$$p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$$

Le nombre de succès, au cours des $\underset{n}{\underbrace{10}}$ épreuves est égal à la somme des nombres obtenus (0 ou 1) à chacune. L'espérance de cette somme sera donc la somme des n espérances, chacune valant p.

Z

$$\boxed{E(X) = np}$$

Variance $V(X) = E(X^2) - \bar{X}^2$

$$\bar{X} = np$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$X^2 = \left(\sum X_i\right)^2$$

$$X^2 = \sum X_i^2 + 2 \sum X_i X_j$$

$$E(X^2) = \underbrace{E\left(\sum X_i^2\right)}_{np} + 2\underbrace{E\left(\sum X_i X_j\right)}_{2 \sum (E(X_i X_j))}$$

L'espérance du produit est égale, dans le cas de 2 variables

cf B3 172 aléatoires indépendantes, au produit des espérances

C'est le cas ici donc $E(X_i \cdot X_j) = E(X_i) \cdot E(X_j)$

$$= p \times p = p^2$$

$p+q)^{n-1} = np.$

De ces produits, il y en a $C_n^2$. On doit les ajouter.

$$2\sum E(X_i . X_j) = 2p^2 . \frac{n(n-1)}{2} = p^2 n(n-1)$$

$$E(X^2) = np + p^2 n(n-1)$$

$$v(X) = E(X^2) - \bar{X}^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2$$

$$= np - np^2$$

$$v(X) = np\underbrace{(1-p)}_{q}$$

$$\boxed{v(X) = npq}$$

<u>Résumé</u> : La loi de probabilité donnant P = prob. ( est facile à retenir si l'on observe que le réel $C_n^k \; p^k \; q^{n-k}$ est le terme général du développem du binôme de Newton $(p+q)^n = p^n + C_n^1 \; p^{n-1} q^1 + \dots +$ $C_n^k \; p^k \; q^{n-k} + \dots + q^n$ et $p^n = C_n^0 \; p^n q^0$

$$q^n = C_n^n \; p^0 q^n$$

On dit que la loi en question (ou distribution) est <u>binômiale</u>. Le lecteur doit retenir les formules :

$$\begin{cases} P(X = k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k} \\ E(X) = np \\ v(X) = npq \end{cases}$$

avec $n$ épreuves

$p$ = probabilité pour 1 succès

$q = 1 - p$

Exercice

Un central téléphonique dessert 100 postes. On a pu estimer que la probabilité qu'un poste donné appelle le central durant 1 mn est $0,04 = p$, quel que soit ce poste et quel que soit la mn durant 1 h de travail. On admet que les différents appels sont indépendants et on appelle $X$ le nombre de postes qui appellent le central durant une minute donné. Distribution de probabilité de $X$ et calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

$P(X = k) = C_{100}^{k} \, (0,04)^k \times (0,96)^{100-k}$

$E(X) = 100 \times 0,04 = 4$

$v(X) = 4 \times 0,96 = 3,84 \;\mapsto\; \sigma = 1,96$

(Voir aussi Belin n° 47 p 408

4.6 18 Inégalité de Bienaymé - Tchébychev

$X$ = v.a.r. à valeurs positives au sens large

$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$

$(p_1)$ $(p_2)$ $(p_3)$ $(p_n)$

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + x_n p_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ / ou bien $a \leq x_1$

ou bien $a > x_n$

ou bien $x_{i-1} < a \leq x_i$

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + | \; p_i x_i + \dots + x_n p_n$$

$$E(X) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$\Sigma_2 = p_i x_i + p_{i+1} x_{i+1} + \dots + p_n x_n$$

$$\Sigma_2 \geqslant a(p_i + p_{i+1} + \dots + p_n)$$ (l'égalité a lieu pour $a = x_i =$

$$E(X) \geqslant \Sigma_2 \geqslant a(p_i + \dots + p_n)$$

$$\underbrace{p_i + p_{i+1} + \dots + p_n}_{} \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

$$Pr(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

( Remarque : on a aussi $p(X > a) < \frac{E(X)}{a}$ si $X$ n'est pas l'application nulle. )

$$Pr(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

(Inégalité de Markov)
$\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

L'inégalité ci-dessus procure un majorant pour le 1er membre.

Plus généralement, $Pr(Y \geqslant a) \leqslant \frac{E(Y)}{a}$

Prenons, pour $Y$, la valeur $Y = (X - \bar{x})^2$

Alors :

$$Pr\left((X-\bar{x})^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{E\left[(X-\bar{x})^2\right]}{\varepsilon^2}$$

$$Pr\left(|X-\bar{x}| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

avec $\varepsilon > 0$

On pose $\varepsilon = t \cdot \sigma$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{t} \quad ; \quad \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$Pr\left(|X-\bar{x}| \geqslant t\sigma\right) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Z

$$Pr\left(\left|\frac{X-\bar{x}}{\sigma}\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{1}{t^2}$$

avec $\bar{x} = E(X)$
$\sigma^2 = v(X)$
$\varepsilon = t\sigma$

( Remarque : on peut n'avoir que des inégalités strictes si $X$ n'est pas l'application constante $X = \bar{x}$ )

5.6 On rappelle que :

$$\Pr(|X-\bar{X}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{v(X)}{\varepsilon^2}$$

Ce majorant est intéressant.

0 $\bar{X}-\varepsilon$ $\varepsilon$ $\bar{X}$ $\varepsilon$ $\bar{X}+\varepsilon$ $X$

$|X-\bar{X}|$

L'évènement "contraire" a une probabilité qui, elle sera minorée par $1-\frac{1}{t^2}$

$a$ $1-a=b$

$a \leq M$

$-a \geqslant -M \rightarrow \underbrace{1-a}_{b} \geqslant 1-$

$$\text{Prob}\left(\frac{|X-\bar{X}|}{\sigma} < t\right) \geqslant 1-\frac{1}{t^2}$$

(NB : Cette dernière inégalité montre que $P\left(\frac{|X-\bar{X}|}{\sigma} \leq t\right) \geqslant 1-\frac{1}{t^2}$

$\bar{X}-\varepsilon$ $\bar{X}$ $X$ $\bar{X}+\varepsilon$

Application

(1)

$X$ = nbre de voitures qui passent entre 17 et 18 h en un point donné de l'autoroute. On a observé que $E(X) = 4$

et $v(X) = 10^5$

Déterminer un minorant de la probabilité de l'év

_ment : $(3500 < X < 4500)$

$\bar{X}-\varepsilon$ 500 $\bar{X}=4000$ 500 $\bar{X}+\varepsilon$

3500 4500

$\varepsilon = 500 = t\sigma$

$\varepsilon^2 = 25.10^4 = t^2.10^5$

$25 = 10t^2 \vdash t^2 = 2,5$

$\frac{1}{t^2} = \frac{10}{25} = 0,4$

min$^t$: $1 - \frac{1}{t^2} = 1 - 0,4 = 0,6$

$P_r\left(|X-\bar{X}| < 500\right) \geqslant \frac{60}{100}$

(2)

5% des articles fabriqués par une usine sont défectueux. Minorer la probabilité d'avoir moins de 2 articles défectueux dans un échantillon de 10 articles en utilisant l'inégalité de B.T.

X = nombre d'articles défectueux

$(X < 2) = (X = 0) \cup (X = 1)$

Distribution binomiale : $p = 0,05$

$q = 0,95$

$n = 10$

$\bar{x} = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5 = E(x)$

$v(X) = 0{,}5 \cdot 0{,}95 = 0{,}475 = \sigma^2$

1,5

$\bar{x} = 0{,}5$

-1 0 1 2

$|X - \bar{x}| < \frac{3}{2}$

$$Pr\left(|X - \bar{x}| < 1{,}5\right) \geqslant -\frac{v(x)}{\varepsilon^2} + 1$$

$$\geqslant -\frac{0{,}475}{2{,}25} + 1$$

$$\geqslant 0{,}79$$

(3) Retour sur l'exercice du "central téléphonique"
(cf chap. 17)

majorer $P(X > 8)$

$E(X) = \bar{x} = 4$

$\sigma \simeq 1{,}96$

$v(X) = 3{,}84$

$\varepsilon$

$\bar{x} = 4$ 8

$\sigma$

$\varepsilon = t\sigma \Rightarrow t = \frac{4}{1{,}96}$

$maj^t = \frac{1}{t^2} = \frac{3{,}84}{16} = 0{,}24$

6.6 19 ## Loi des grands nombres

$X_1, X_2, \ldots, X_n$
Toutes ces v.a.r. sont indépendantes (ex : loi binomiale)
de même espérance et de même variance.

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

$$E(Y_n) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)}{n}$$

ex : Loi binômiale

$X_i$ prend les valeurs 0 ou 1.

$E(X_i) = p$

$E(Y_n) = \frac{np}{n} = p$

$$E\Big(\overbrace{\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}}^{f_n}\Big) = p$$

Dans ce cas $Y_n = f_n$ = fréquence des succès.

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \underbrace{V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}_{\text{ici, } V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)}$$

(cf exercice : var. d'une somme = somme des variances dans le cas où les $X_i$ sont indépendantes.

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_i V(X_i) = \frac{1}{n^2}\, n\, V(X_i)$$
$$= \frac{1}{n} V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\overbrace{\sum_i v(X_i)}^{v(X)} = n$$

S'il s'agit d'une loi binômiale, alors $\sum_i v(X_i) = n\ldots$

et $v(Y_n) = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}$

$$\boxed{v(Y_n) = \frac{pq}{n}}$$

Il s'agit, bien entendu, dans ce dernier cas de $Y_n = f_n$.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev

$Pr\left( \left| Y_n - E(Y_n) \right| < \varepsilon \right)$

* Cas général : les $X_i$ sont indépendantes, de même espérance, de même variance.

$$\underbrace{\text{espérance}}_{m}, \quad \underbrace{\text{variance}}_{\sigma^2}$$

$$Pr\left( \left| Y_n - E(Y_n) \right| < \varepsilon \right) \geqslant 1 - \frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

avec $v(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$Pr\left( \left| Y_n - E(Y_n) \right| < \varepsilon \right) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

* Loi binomiale.

$$Pr\left(|f_n - p| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq Pr\left(|f_n - p| < \varepsilon\right) \leq 1$$

$n \to +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} Pr(|f_n - p| < \varepsilon) = 1$

Exercices d'application

Trouver $n$ ? _ Jeu pile ou face $n$ fois de suite.

« $f_n = \frac{1}{2}$ à $\frac{1}{100}$ près » avec une probabilité $\geq 0,9$

Pour réaliser $Pr \geq 0,9$, il suffit que soit réalisée la circonstance

$$\underbrace{1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}}_{\text{"garde" inférieure}} \geq 0,9 \quad \text{car} \quad Pr \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 0,9$$

$$1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n.10^{-4}} \geq 0,9$$

$$\frac{1}{4n.10^{-4}} \leq 1 - 0,9$$

$$\frac{10^4}{4n} \leq 0,1 \quad \vdash \quad n \geq \frac{10^4}{4.10^{-1}}$$

$$n \geqslant \frac{10^5}{4} = 25 \cdot 10^3$$

$$n \geqslant 25\,000$$